Spezielle Relativitätstheorie

- ## Berechnung des „Gamma“ Faktors

Aus der Lorentztransformation entnimmt man:

$$x = \gamma(x' + vt') \text{ und } x' = \gamma(x - vt)$$

Mit

$$x = c \cdot t$$
$$x' = c \cdot t'$$

folgt

$$ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c + v)t'$$
$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma(c - v)t$$

und somit für die („ruhende“) Zeit

$$t = \frac{\gamma(c + v)t'}{c}$$

Einsetzen in die obige Gleichung ergibt

$$ct' = t'\gamma^2 \frac{(c^2 - v^2)}{c}$$

nun durch t' dividieren und mit *c* multiplizieren. Es folgt

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2)$$

Umformen ergibt

$$\frac{c^2}{c^2 - v^2} = \gamma^2$$

und weiter

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2}$$

und

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

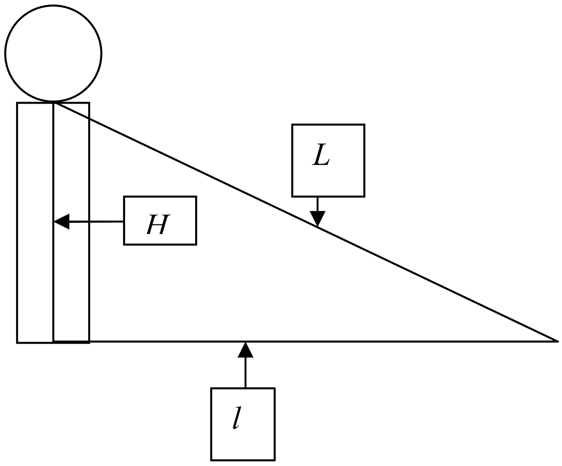
somit

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

und schließlich die Wurzel ziehen:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Berechnung der Zeitdilatation



der ruhende Beobachter erkennt

$$L = c \cdot t'$$
$$l = v \cdot t'$$
$$H = c \cdot t$$

Mit dem Satz von Pythagoras folgt

$$(ct)^2 + (vt')^2 = (ct')^2$$

und damit

$$c^2 t^2 = c^2 t'^2 - v^2 t'^2$$

Herausheben von t und Division durch c ergibt

$$t^2 = t'^2 \frac{c^2 - v^2}{c^2}$$

Ziehen der Quadratwurzel

$$t = t' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

oder

$$t' = \gamma \quad \cdot t$$

Berechnung der Längenkontraktion

Für die Längen(enden) gilt

$$x_1 = \gamma (x'_1 - vt'_1)$$
$$x_2 = \gamma (x'_2 - vt'_2)$$

Da die Messung im Bezugssystem gleichzeitig erfolgt (anlegen eines Maßstabes) gilt $t'_1 = t'_2$ und Subtrahieren der 2. Gleichung von der 1. erbringt

$$x_1 - x_2 = \gamma (x'_1 - x'_2)$$

mit

$$x_1 - x_2 = \Delta x = l$$
$$x'_1 - x'_2 = \Delta x' = l'$$

folgt

$$l = l' \cdot \gamma$$

- ## Berechnung der Transformationsgleichungen für die Zeit

mit den Transformationsgleichungen

$$x = \gamma (x' + vt')$$
$$x' = \gamma (x - vt)$$

folgt nach gegenseitigem Einsetzen

$$x = \gamma \; (\gamma \; (x - vt) + vt')$$

Division durch γ ergibt

$$\frac{x}{\gamma} = \gamma \; (x - vt) + vt'$$

Trennung der gestrichenen von den ungestrichenen Größen

$$vt' = \frac{x}{\gamma} - \gamma (x - vt)$$

und erneut Division durch γ ergibt

$$\frac{vt'}{\gamma} = \frac{x}{\gamma^{2}} - (x - vt)$$

somit

$$\frac{vt'}{\gamma} = x(1 - \frac{v^2}{c^2}) - x + vt$$

und damit

$$\frac{vt'}{\gamma} = x - \frac{v^2 x}{c^2} - x + vt$$

x fällt heraus, Division durch *v* und Multiplikation mit γ ergibt schließlich

$$t' = \gamma \; (t - \frac{vx}{c^2})$$

Würde man die selbe Rechnung mit *t* durchführen ergäbe es:

$$t = \gamma \; (t' + \frac{vx'}{c^2})$$

Berechnen der Geschwindigkeitsaddition

Mit

$$x = \gamma \, (x' + vt')$$

und

$$t = \gamma \, (t' + \frac{vx'}{c^2})$$

folgt für

$$u = \frac{x}{t}$$

somit

$$u = \frac{\gamma \, (x' + vt')}{\gamma \, (t' + \frac{vx'}{c^2})}$$

Division durch γ und t' ergibt

$$u = \frac{\frac{x'}{t'} + v}{1 + \frac{vx'}{c^2 t'}}$$

Da gilt $\frac{x'}{t'} = u'$, folgt nunmehr

$$u = \frac{u' + v}{1 - \frac{u'v}{c^2}}$$

- ## Beispiele

I.) Der nächste Fixstern ist Alpha-Centauri am südlichen Sternenhimmel. Seine Entfernung beträgt 4,5 Lichtjahre.
a) Wie lange bräuchte ein Raumschiff, um zum Stern und wieder zur Erde zu gelangen, wenn seine Geschwindigkeit $v = 0{,}5c$ beträgt?

Mit $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{9Lj}{0{,}5c} = 18a$

b)Wie lange würde der Flug für die Astronauten an Bord des Raumschiffes dauern?

Mit $t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 18\sqrt{1-0{,}5^2} = 18 \cdot 0{,}8660 = 15{,}5885\,a$

c) Welche Geschwindigkeit müsste das Raumschiff haben, damit für die Besatzung während der Reise nur ein Jahr vergeht?

Mit $t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 1a = 18\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1}{18^2} = 1-\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow (1-\frac{1}{18^2})c^2 = v^2 \Rightarrow v = 0{,}9985c$

II.) Ein Astronaut tritt mit 25 Jahren eine Weltraumreise an, die ihn mit $v = \frac{12}{13}c$ durch das All führt. Bei der Rückkehr ist sein Zwillingsbruder 69 Jahre alt. Wie alt ist der Astronaut?

Mit $t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 44\sqrt{1-0{,}9231^2} = 16{,}9231 \approx 17 \Rightarrow 25+17 = 42a$

III.) Ein Myon werde in 20 *km* Höhe durch die Höhenstrahlung erzeugt. Mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}9998c$ fliegt es zur Erde. Wie stark ist im Ruhsystem der Myonen die Höhe *H* kontrahiert?

Mit $l = l' \cdot \gamma$ folgt $l' = H' = \frac{l}{\gamma} = \frac{H}{\gamma} = 20000\sqrt{1-0{,}9998^2} = 20000 \cdot 0{,}02 = 399{,}98m \approx 400m$

IV.) Auf das Wievielfache erhöht sich die Masse eines Körpers, wenn seine Geschwindigkeit a) 90%, b) 99% und c) 99,99% der Lichtgeschwindigkeit beträgt?

a) $\frac{m'}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 2{,}2942$

b) $\frac{m'}{m} = 7{,}0888$

c) $\frac{m'}{m} = 70{,}7124$

Berechnung der Massenzunahme

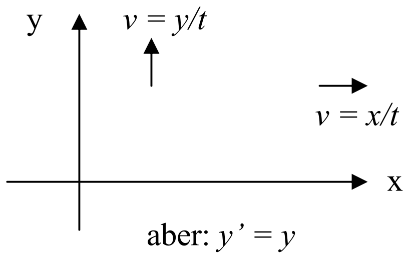
Die Geschwindigkeit von einem bewegten System aus ist gegeben durch $v' = \frac{\Delta s'}{\Delta t'}$

Da aber $\Delta s'$ senkrecht auf v des Beobachters steht, gibt es keine Längenkontraktion und man schreibt

$$v' = \frac{\Delta s}{\Delta t'}$$

Für $\Delta t'$ gilt jedoch $t = \gamma \cdot t'$ und damit folgt

$$v' = \frac{\Delta s}{\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{s}{t}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$



Und weil $v = \frac{s}{t}$ folgt

$$v' = v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Der Impulssatz lautet

$$p = p' \text{ oder } m \cdot v = m' \cdot v'$$

somit folgt also

$$m \cdot v = m' \cdot v\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

und damit (nach Division durch v)

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m \cdot \gamma$$

Für das konkrete Beispiel folgt also

$$\boxed{\frac{m'}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$