

Die Exponentialfunktion

Herleitung durch Reihenentwicklung

Um 1740 von Euler begründet und erstmals den Buchstaben „e“ eingeführt für die „natürliche Exponentialfunktion“

Aus der Gleichung

$$a^0 = 1$$

schließt man auf die Relation

$$a^\omega = 1 + \chi$$

für unendlich kleine ω . Dabei sei aus Stetigkeitsgründen χ wieder eine unendlich kleine Zahl. Man setzt $\chi = k\omega$. ω ist demnach der Logarithmus von $1 + k\omega$ zur Basis a

$$\omega = \log_a(1 + k\omega)$$

Ein Beispiel zeigt, daß die Zahl k von der Basis a abhängt: für $a = 10$ und $\omega = \frac{1}{1000000}$ ist

$$k = 2,30258$$

k ist also eine endliche Zahl. Jetzt bildet man die i -te Potenz auf beiden Seiten der Gleichung

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$$

und entwickelt davon die rechte Seite nach dem binomischen Lehrsatz

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \dots$$

i ist dabei eine beliebige Zahl. Setzt man: $i = \frac{z}{\omega}$, wobei z irgend eine endliche Zahl bedeutet,

so wird, da ω unendlich klein ist, also i unendlich groß sein. Einsetzen von $\frac{z}{\omega}$ für i führt auf

$$a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2 \cdot i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}k^4z^4 + \dots$$

Dies ist eine Gleichung für die endliche Potenz a^z , bei der auf der rechten Seite aber leider noch die unendlich großen Zahlen $i, i-1, \dots$ stehen.

Jetzt argumentiert man, daß für unendlich große Zahlen i gilt:

$$\frac{i-1}{i} = \frac{i-2}{i} = \frac{i-3}{i} = 1$$

und entsprechend

$$\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2} \quad \frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3} \quad \frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$$

Damit wird die Reihe zu

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

und weiters

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Zur Herleitung einer Reihe für den Logarithmus setzt man nun

$$a^{i\omega} = 1 + x$$

weil

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i = 1 + x$$

Daraus folgt

$$i\omega = \frac{i}{k} \left[(1+x)^{\frac{1}{i}} - 1 \right]$$

Wieder wird die rechte Seite in einer Binomialreihe entwickelt und man gewinnt eine Reihe für $\log_a(1+x)$

$$\log_a(1+x) = i\omega = \frac{i}{k} \left[\frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i \cdot 2i}x^2 + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}x^4 + \dots \right]$$

mit der obigen Vereinfachung folgt

$$\log_a(1+x) = \frac{1}{k} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

Dies wird besonders einfach für $k=1$. Für diesen Wert bezeichnet man die Basis mit dem Buchstaben e

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

insbesondere gilt für die Basis e

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$$

Euler berechnet die Basis e der „natürlichen Logarithmen“ auf 23 Stellen:

$$e = 2,71828182845904523536028\dots$$

Die Reihe für $k=1$ sieht dann so aus:

$$\log_a(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Euler findet noch die wichtige Formel

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$$

für unendlich großes i . Sie entspricht der modernen Darstellung

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

ganz allgemein hat die Exponentialfunktion die Form:

$$x \mapsto a^x$$

Anwendungen in den Naturwissenschaften

Wachstumsfunktionen

z.B.: des Waldes

Baumbestand nimmt jährlich um p % zu, daher multipliziert sich das Volumen jährlich mit

$$1 + \frac{p}{100}$$

wird nicht geschlägert, gilt

$$V_n = V_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

z.B.: von Bakterien

Sind n_0 Bakterien in Nährlösung, vergeht zwischen aufeinanderfolgenden Teilungen im Mittel die Zeit τ (Verdopplungszeit), gilt

$$n = n_0 \cdot 2^{\frac{t}{\tau}}$$

z.B.: Abnahme des Luftdruckes

Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab und zwar sinkt er jeweils um die Hälfte, wenn die Höhe um etwa 5,5 km zunimmt

$$b = b_0 \cdot 0,5^{\frac{h}{5,5}}$$

z.B.: gedämpfte Schwingungen

Durch Reibung nimmt Amplitude ab, mit konstantem Faktor q ($q < 1$). Nach n Schwingungen ist Amplitude mit Ausgangswert a_0 auf den Wert a gesunken

$$a = a_0 \cdot q^n$$

z.B.: Absorption von Licht

Verliert Licht beim Durchgang durch ein durchsichtiges Material der Dicke h die Hälfte seiner Intensität, nach der nächsten Schicht wieder und so fort, gilt nach der Schichtdicke x

$$S = S_0 \cdot 2^{-\frac{x}{h}}$$

Zerfallsfunktion:

radioaktiver Zerfall:

Die Zeit, in der von einem vorhandenen Quantum die Hälfte zerfällt, heißt Halbwertszeit.

$$M = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}$$

Skizze eines Beispiels:

Wachstum

$p(t)$ Anzahl der Menschen zur Zeit t und r der Unterschied zwischen Geburten- und Sterberate, dann

$$p'(t) = r \cdot p(t)$$

Die Änderung der Bevölkerung pro Zeiteinheit. Im einfachsten Fall ist $r = \text{konst.}$ Dies ist das mathematische Modell für das Malthussche Bevölkerungsgesetz. Da man weiß, wieviel Menschen zur Zeit $t_0 = 1950$ gelebt haben, gilt außerdem $p(t_0) = p_0$ (Anfangswertproblem).

Die Lösung ist dann:

$$p(t) = p_0 \cdot e^{r(t-t_0)}$$

Ist die Anzahl sehr groß, fällt die Zunahme um ein paar Menschen nicht ins Gewicht, daher bleibt die Funktion stetig. Bleibt die Frage ob so ein Modell sinnvoll ist. r erhält man, indem man mit zwei reellen Werten vergleicht: Für 1950 und 1970 erhält man in Mio gemessen

$$3632 = p(1970) = 2509 \exp(r(1970 - 1950))$$

und damit

$$r = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{3632}{2509}\right) \approx 0,0185$$

Jahr	1	1850	1940	1950	1960	1970	1980	1990
	ca.160	ca.1200	2249	2509	3010	3632	4419	
	$5,5 \cdot 10^{-13}$	395	2085	2509	3019	3632	4371	5259

nur für „kleine“ Zeiträume genau! Laut der Formel können im Jahr 1 überhaupt keine Menschen gelebt haben. Im Jahr 2700 würden dagegen etwa 2 662 788 041 Mio Menschen leben
1837 holländischer Biomathematiker stellt das „logistische Gesetz“ des Populationswachstums auf:

$$p'(t) = \alpha p(t) - \beta (p(t))^2$$

α, β sind positive Konstanten. β umso kleiner, je größer der dem einzelnen Exemplar zur Verfügung stehende Lebensraum und je mehr Nahrungsmittel. α ein Erfahrungswert, der heute zu $\alpha = 0,029$ berechnet wird. α, β können durch verbesserte medizinische Betreuung, technologische Entwicklungen, Naturkatastrophen, Umweltverschmutzung, etc. beeinflusst werden. Man kann viele Verbesserungen einbauen, langfristig bleibt es sehr fragwürdig.

Mit $p(t_0) = p_0$ findet man:

$$p(t) = \frac{\alpha p_0 \exp(\alpha(t-t_0))}{\alpha - \beta p_0 + \beta p_0 \exp(\alpha(t-t_0))} = \frac{\alpha p_0}{\beta p_0 + (\alpha - \beta p_0) \exp(\alpha(t_0 - t))} \frac{\alpha}{\beta}$$

Wird t immer größer, nähert sich der Quotient immer mehr dem Ausdruck $\frac{\alpha}{\beta}$, also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{\alpha p_0}{\beta p_0} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Mit anderen Worten, die Zuwachsrates strebt den Wert Null an. Mit obigem α ergibt sich für β

$$\beta = 4,105 \cdot 10^{-12}$$

und damit die Erdbevölkerung zu

$$\frac{\alpha}{\beta} = 7,06 \cdot 10^9 \quad \text{Milliarden Menschen.}$$