Man denkt sich die Geschwindigkeitsvektoren der Teilchen in ihre Komponenten in die 6 Richtungen der Koordinatenachsen (positive und negative x-, y-, und z-Achse) zerlegt. Dies bedeutet, dass man die ungeordnete Bewegung der Gasteilchen durch eine in 6 Richtungen geordnete Bewegung ersetzen kann. In jede der genannten Richtungen bewegt sich dann $1/6$ der in dem Würfel enthaltenen Teilchen, so dass auch auf jede Würfelfläche $1/6$ der Teilchen treffen muss.
Die Anzahl der in dem Würfel befindlichen Teilchen sei *N*. **Unter der Teilchenzahldichte *n* versteht man den Quotienten aus der Anzahl *N* der in dem Volumen *V* enthaltenen Teilchen und dem Volumen.**

$$n = \frac{N}{V}$$

Der auf eine Fläche *A* ausgeübte Druck wird allein durch die in der positiven x-Achse fliegenden Teilchen bewirkt. Diese haben natürlich unterschiedliche Geschwindigkeiten. Die Teilchen

mit der Geschwindigkeit v_{x1} haben die Teilchenzahldichte n_1

mit der Geschwindigkeit v_{x2} haben die Teilchenzahldichte n_2 usw.

In einem bestimmten Zeitintervall Δt kommen aber nicht alle diese Teilchen zum Stoß, sondern nur diejenigen, deren Abstand von der betrachteten Fläche $A = a^2$ höchstens

$$x_1 = v_{x1}\Delta t$$
$$x_2 = v_{x2}\Delta t \quad \text{usw.}$$

ist. Dies sind diejenigen Teilchen, die sich jeweils in einem Quader mit der Grundfläche *A* und den Höhen $v_{x1}\Delta t$ oder $v_{x2}\Delta t$ usw. befinden. Für die Anzahl z_i dieser Teilchen gilt

$$z_1 = n_1 a^2 v_{x1}\Delta t$$
$$z_2 = n_2 a^2 v_{x2}\Delta t \quad \text{usw.}$$

Bei dem senkrechten Stoß gegen die Wand werden die Teilchen elastisch reflektiert. Dabei bleiben die Geschwindigkeitsbeträge erhalten. Bezeichnet man die für alle Teilchen als gleich groß vorausgesetzte Masse mit m_0, so beträgt der Impuls eines Teilchens mit der Geschwindigkeit v_{x1}

vor dem Stoß $+m_0 v_{x1}$ und

nach dem Stoß $-m_0 v_{x1}$

Da z_1 Teilchen in der Zeit Δt mit der Geschwindigkeit v_{x1} gegen die Fläche *A* stoßen, beträgt also die Impulsänderung dieser Teilchen

$$\Delta p_1 = z_1 = (m_0 v_{x1} - (-m_0 v_{x1})) = z_1 2 m_0 v_{x1} = 2 n_1 a^2 m_0 v_{x1}^2 \Delta t$$

Entsprechende Impulsänderungen ergeben sich für die Teilchen mit den Geschwindigkeiten v_{x2}, v_{x3} usw.
Für die auf die Fläche *A* ausgeübten Kräfte gilt dann:

$$F_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = 2 n_1 a^2 m_0 v_{x1}$$

$$F_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = 2 n_2 a^2 m_0 v_{x2} \quad \text{usw.}$$

Die Gesamtkraft beträgt also:

$$F = F_1 + F_2 + \ldots = 2 m_0 a^2 (n_1 v_{x1}^2 + n_2 v_{x2}^2 + \ldots..)$$

Hieraus folgt für den auf die Fläche *A* ausgeübten Gasdruck

$$p = \frac{F}{A} = \frac{F}{a^2} = 2 m_0 (n_1 v_{x1}^2 + n_2 v_{x2}^2 + \ldots..)$$

Es ist zweckmäßig, die Quadrate der Einzelgeschwindigkeiten durch einen Mittelwert zu ersetzen, den man als *mittleres Geschwindigkeitsquadrat* $\overline{v_x^2}$ bezeichnet. Es gilt folgende Definition:

Wenn sich N_1 Teilchen mit der Geschwindigkeit v_1, N_2 Teilchen mit der Geschwindigkeit v_2 usw. bewegen, so versteht man unter dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat $\overline{v^2}$ die Größe

$$\overline{v^2} = \frac{N_1 v_1^2 + N_2 v_2^2 + ...}{N}$$

wobei $N = N_1 + N_2 + ...$ die Gesamtzahl der betrachteten Teilchen ist.

Führt man das mittlere Geschwindigkeitsquadrat in die obige Gleichung für den auf die Fläche *A* ausgeübten Druck ein und betrachtet weiter, dass sich aus den früher dargelegten Gründen nur $1/6$ der *N* Teilchen in Richtung der positiven x-Achse bewegt, so ergibt sich

$$p = 2m_0 \frac{n}{6} \overline{v_x^2} = \frac{n\, m_0 \overline{v_x^2}}{3}$$

Da *n* die Teilchenzahldichte und m_0 die Masse des einzelnen Teilchens bedeuten, gilt für die Gesamtmasse *m* der in dem Volumen *V* enthaltenen Teilchen

$$m = n\, m_0 V$$

Hieraus folgt für die Dichte ρ des Gases

$$\rho = \frac{m}{V} = n\, m_0$$

Unter Verwendung dieser Zusammenhänge kann die obige Gleichung für den Druck *p* auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v_x^2} = \frac{m \overline{v_x^2}}{3V}$$

oder

$$pV = \frac{1}{3} m \overline{v_x^2}$$

In vielen Fällen ist es zweckmäßig, dieses Gesetz anders zu schreiben, indem man von der Tatsache Gebrauch macht, dass zu jedem mittleren Geschwindigkeitsquadrat auch eine *mittlere kinetische Energie* $\overline{W_k}$ gehört. Diese beträgt für das einzelne Teilchen

$$\overline{W_k} = \frac{1}{2} m_0 \overline{v_x^2}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die vorhergehende Gleichung ein und berücksichtigt gleichzeitig, dass für die Gesamtmasse *m* der in dem Volumen *V* enthaltenen *N* Teilchen gilt

$$m = N\, m_0$$

so ergibt sich

$$pV = \frac{2}{3} N \overline{W_k}$$

Wenn es sich um ein abgeschlossenes System handelt, so ist *N* konstant, aber auch *V* und *T*, und damit also auch $\overline{W_k}$. Es folgt:

$$pV = const.$$

Mit dieser Gleichung haben wir ein wichtiges Gesetz abgeleitet, das auch durch Versuche gefunden werden kann. Es lautet:

Bei einer abgeschlossenen Gasmenge ist bei konstanter Temperatur das Produkt aus dem Volumen *V* und dem auf die Gefäßwand ausgeübten Druck *p* konstant.

$$pV = const = \frac{2}{3} N \overline{W_k}$$

Die Konstante ist 2/3 des Produktes aus der Gesamtzahl N der in der Gasmenge enthaltenen Teilchen und der mittleren kinetischen Energie $\overline{W_k}$ der Teilchen.
Man bezeichnet es als Boyle-Marotte-Gesetz.